

Thema NR. 1

Aufgabe

1. a) Satz des Pythagoras: a Die In einem recht-
winkligen Dreieck ist die Summe der $\frac{1}{2}$ Flächeninhalte
Kathetenquadrates also gleich groß dem
Hypothenusenquadrat
 $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: Das Quadrat über der Höhe ist
in einem rechtwinkligen Dreieck gleich dem
Rechteck aus den Seiten p, q

$$h^2 = p \cdot q$$

Kathetensatz: In einem rechtwinkligen Dreieck ist
das Quadrat über der Kathete a immer
gleich dem Produkt aus der Seite Hypotenuse
c und Teilabschnitt p (Satz des Euklid)

s. o.

$$a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q \quad \frac{1}{2}$$

Skizze für alle drei Fälle:

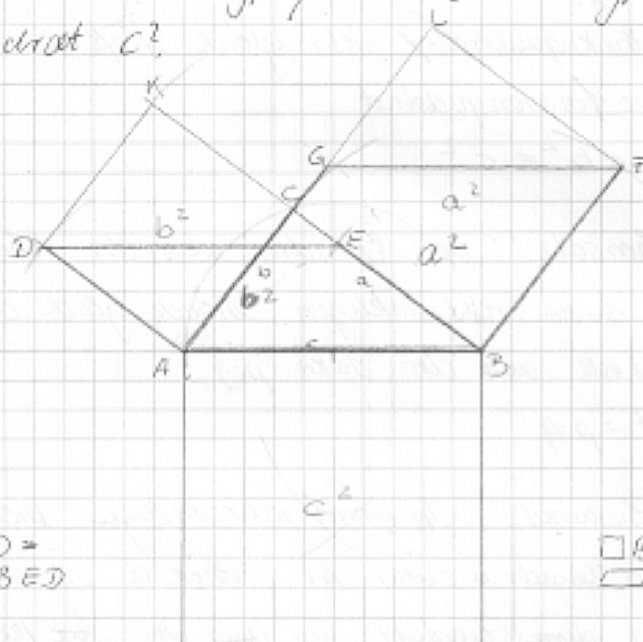


$\frac{1}{2}$ Umkehrungen!

Aufgabe
1B) Beweis des Pythagoräischen Satzes:

Zeichnerische durch Konstruktion:

Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck und errichte über der Seite a das Kathetenquadrat, über der Seite b das Kathetenquadrat und über der Hypotenuse das Hypotenusenquadrat c^2 .



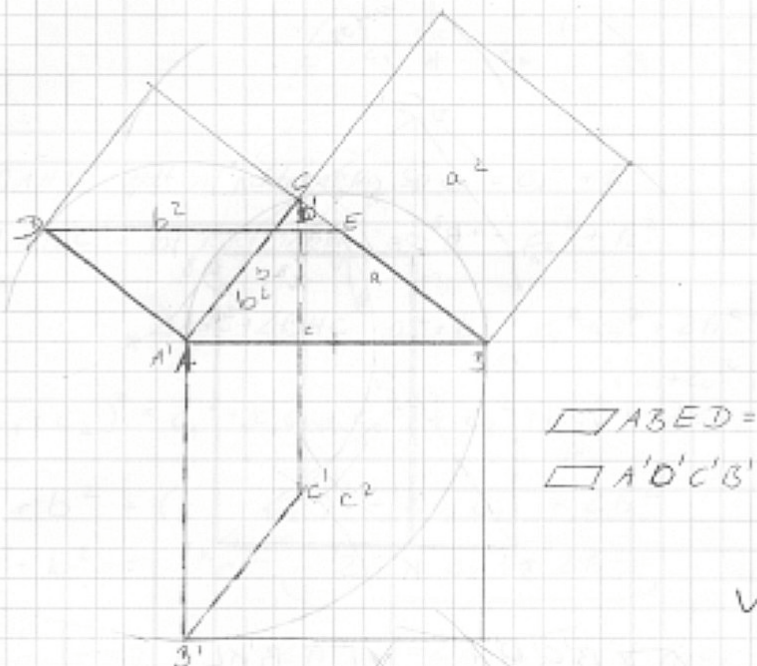
$\square ACHD =$
 $\square ABED$
✓

$\square BFLC =$
 $\square BCFG$

In der gleichen Zeichnung werden nun die Kathetenquadrate in flächengleiche Rechtecke verwandelt. Dies ist geschehen, da das Quadrat a^2 die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe hat wie das dazugehörige Rechteck $ABED$.

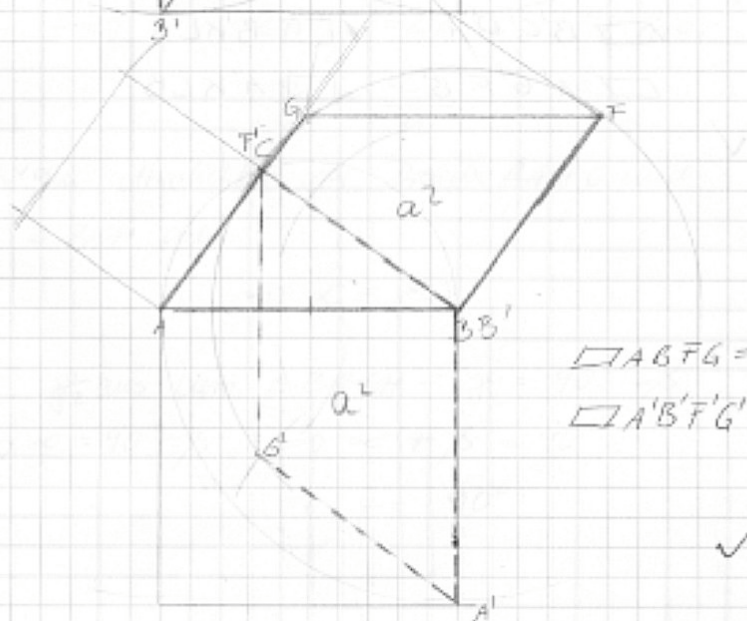
In der nächsten Zeichnung werden die flächengleich-
 gleichen Parallelogramme durch Drehung um 90°
 (Kathetenquadrat b^2 um Zentrum A, Katheten-
 quadrat a^2 um Zentrum B) ins das Hypotenusen-
 quadrat gedreht. Das Abbild eines Bildes ist
 bleibt durch Drehung gleich. ✓

Seite: 2



$$\square ABED =$$

$$\square A'D'C'B'$$



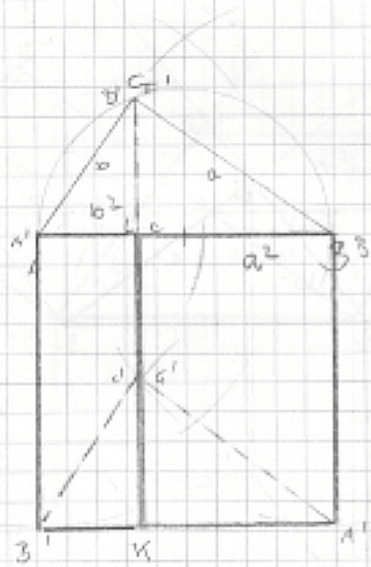
$$\square ABFG =$$

$$\square A'B'F'G'$$

nicht aus der
Zeichnung!

Als letzter Schritt werden die so entstandenen
Parallelogramme des Hypotenusenquadrat wieder
~~durch Drehung~~
in Rechtecke verwandelt. Höhe und Grundseite
sind bei entsprechendem Parallelogramm und
Rechteck gleich.

Aus der Zeichnung lässt sich folgern:
 $a^2 + b^2 = c^2$



$$\square B'C'D'A' = \square B'KLA$$

$$\square A'G'F'B' = \square A'KLB$$

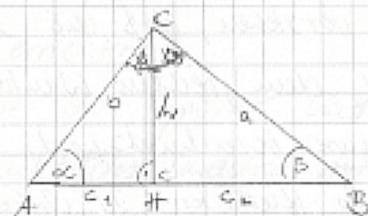
✓

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:

Wenn in einem Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$
dann ist das Dreieck rechtwinklig.

rechnerischer Beweis:

Skizze



für $\triangle AHC$ gilt ist rechtwinklig $\Rightarrow b^2 = c_1^2 + h^2$

$\triangle BHC$ ist rechtwinklig $\Rightarrow a^2 = c_2^2 + h^2$

$$\triangle AHC + \triangle BHC \quad a^2 + b^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2h^2$$

$$\left((c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2 \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 = \frac{(c_1 + c_2)^2}{1 - 2c_1c_2} \right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)^2 - 2c_1c_2 + 2h^2$$

$$* a^2 + b^2 = c^2 - 2c_1c_2 + 2h^2$$

$$\Rightarrow 2h^2 = 2c_1c_2 \quad | : 2c_1$$

$$\frac{h}{c_1} = \frac{c_2}{h}$$

wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AHC$ und $\triangle BHC$ gilt

$$\Rightarrow \alpha = \beta_2$$

$$\beta_2 \text{ aus dem } \triangle BHC: \beta_2 = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Seite: 3

Wird nachgewiesen,
dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist,
dann ist das Dreieck
rechtwinklig.

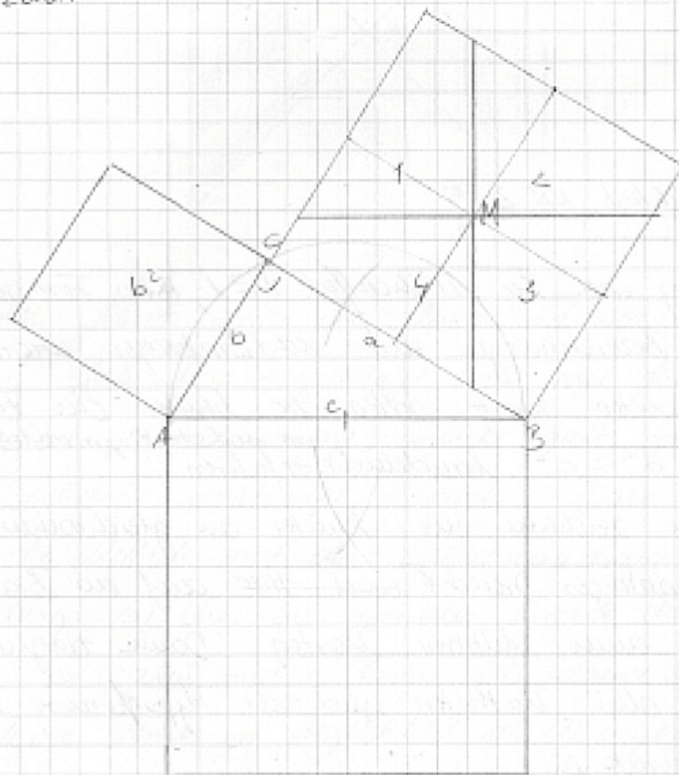
Das ist kein
Weg zum Beweis
der Umkehrung.

Sie setzen ja
 $\gamma = 90^\circ$ voraus,
was Sie aber
zeigen sollen.

Oben Die Schüler sollen ableiten können, daß der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ für beliebige rechtwinklige Dreiecke gilt.

Dazu sollen die Schüler ein beliebiges ^{rechtwinkliges} Dreieck zeichnen und die Kathetenquadrat sowie das Hypotenusenquadrat errichten.

Anschließend sollen sie das größte Kathetenquadrat durch den Mittelpunkt des Quadrats mit ^{zwei} senkrechten und einem horizontalen Liniensegment c zeichnen.

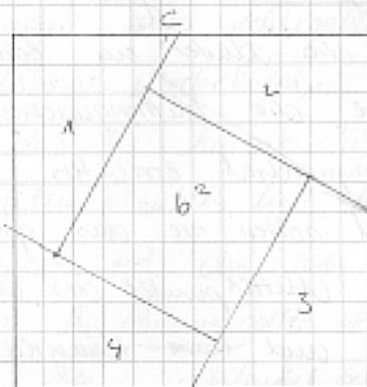


Durch auseinandernehmen der Teilstücke und Zusammenlegen der Teilstücke und ~~zu~~ dem Kathetenquadrat b^2 zu dem Hypotenusenquadrat, ^{z. B. durch Verschieben} herleiten die Schüler: $a^2 + b^2 = c^2$ ✓

selbst?

Tauig als
Plausibilitätsbetrachtung,
nicht als Beweis!

Skizze des zusammengelegten Hypothenusens



✓

Möglichkeit NR. 2

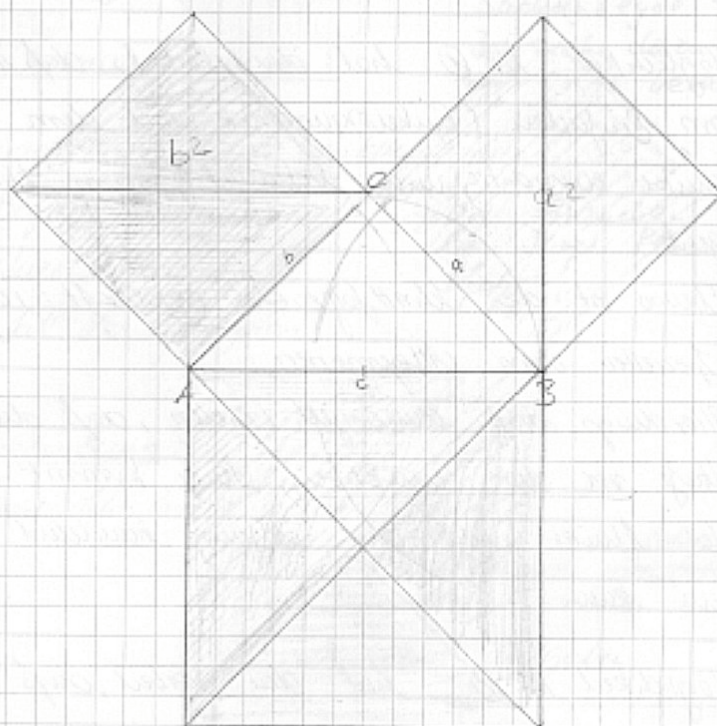
Einbringung wie bei Möglichkeit NR. 1, aber Festlegung der Bezeichnungen eines rechtwinkligen Dreiecks.

Als zweiten Schritt sollen die Schüler die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ ^{von gleichschenkeligen rechtwinkligen} herleiten.

Dazu zeichnen die Schüler ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck ~~und~~ ^{und} tragen auf ein Blatt Papier oder einen dünnen Karton Draht tragen sie über das Katheten und der Hypotenuse die Quadrate ein.

Anschließend fügen sie die Kathetenquadrate ^{einmal senkrecht u. einmal waagrecht} durch die Diagonalen ^{und} bemalen entsprechen Teilbereiche.

Die Schüler sollen die ausgedehnten Teilbereiche zu dem Hypothenusenquadrat zusammenlegen und somit erkennen $a^2 + b^2 = c^2$ (Teil des Puffa



trapez ist nicht so
- aber wenn
- die ist mit
- und schneidet
... ab

Als dritten Schritt sollen die Schüler erkennen las-
sen, daß diese Eigenschaft nicht nur für
gleichschenkelige rechtwinklige Dreiecke gilt, sondern
für beliebige rechtwinkl. Dreiecke. Dazu kann
z.B. die Methode mit den Einheitsquadraten dienen,
allerdings mit dem ein speziellen Dreieck da die
Seiten vorgegeben sind. Besser ist folgende Methode,
die bereits in Möglichkeit Nr. 1) aufgeführt
ist. ~~Die Schüler zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck~~
wobei, bei der das größte Kathetenquadrat eines
beliebigen, rechth. Dreiecks als ein Längsrechte
und ein Querrechte zu c zerlegt wird.
Im Anschluß an beide Einführungsstunden müssen
in der Folgerunde Aufgaben behandelt werden.

Diskussion:

Möglichkeit NR ① hat den Vorteil, daß sie vom Einfachen (Einheitsquadrat und dem Skalar einrichtig und bekannt) zum Schweren geht.

Daraus ist die Abfolge der Vorkurs: vom Speziellen zum Allgemeinen.

Allerdings muß bemerkt werden, daß die ikonische Stufe vor der exakten Stufe kommt und der Skalar nicht am Anfang handhabbar tätig sein kann.

Möglichkeit NR ② hat den Vorteil, daß sie von der exakten zur ikonischen und dann symbolischen Stufe übergeht. Bei dieser Möglichkeit wird ebenfalls vom Speziellen zum Allgemeinen vorgegangen.

#

Welche Vorgehensweise?

Das könnte sofort
beobachtet werden,
wenn Sie die
Quadratstärke aus-
schneiden ...

Aufgabe
3)

Unterrichtseinheit

Kluster voraussetzungen:

- Quader als Körper vorstellen können
- Begriff Raumdiagonale?
- Würfelziehen
- Idee des Pythagoras

Sachanalyse +
Ich zeichne dazu Ihre Skizze
auf S. 15 Geze.

Die brauchen Sie
bei Ihrer Planung
nicht!

Lehrplanbezug:

neuer Lehrplan: "neue Klame"

- Kathetik, Hypotenuse, ^{Lehrsatz} ~~Anwendungsaufgaben~~
- Anwendungsaufgaben

Grobziel:

- Die Kluster sollen um Quader rechte Winkel ^{wo?}
erkennen und damit rechnen können.

H Lösen der Sachaufgabe?

Feinziele:

F1: Die Kluster sollen eine Skizze zur Problem-
situation zeichnen können. ✓

F2: Die Kluster sollen um Diagonalen [?]
den 90° Winkel erkennen.

F3: Die Kluster sollen die fehlende Diagonalen-
seite berechnen können. ✓

9.5.22

Attkulation	Schüler - Lehrer Aktivität	Medien / Material
-------------	----------------------------	-------------------

Motivation	L: Erst Aufgabe vor: Ein Kunde steht in einem Antiquitätladen einen quadratischen unterlegbaren Schrank, Name der Schrank in der Wohnung aufgestellt werden, wenn die Raumhöhe 230cm beträgt und der Schrank die Maße $t = 100\text{cm}$, $b = 140\text{cm}$, $h = 200\text{cm}$. Wie würdest Du hier vorgehen?	L-Vortrag Skizze an der Tafel
------------	--	----------------------------------

Hier erwarten Sie schon die Lösung??

So einfach wird das Problem sicher nicht zu lösen sein!

	Schülerantworten: Vom den Schrank durch die Tür zu bekommen $\rightarrow$ Rippen Schrank um Ecke aufstellen. $\Rightarrow$ Wir müssen die Diagonale berechnen.	Schülergespräch Welche?
--	---	----------------------------

Zelaugabe	Wir wollen heute diese Sachaufgabe lösen, indem wir die Diagonale des Schrankes berechnen.	
-----------	--	--

Einarbeitung	L: Was schlägst Du vor, wie vorgegangen werden soll?	
--------------	--	--

Modell!

Hier wäre ein unaufrichtiges, Modell besser.

	Schüler: Wir brauchen zuerst eine Skizze.	Schülergespräch
--	---	-----------------

	L: Was zeichnest Du in die Skizze?	
--	------------------------------------	--

	Schüler: Ich zeichne als Beispiel einen Wandschrank (A ₂) dessen Maße ich brauche die obere Kante von dem Schrank und die Diagonale.	Wandschrank doch wäre ein viel einfacher Schrank
--	--	--

	L: Welche Diagonale ist notwendig?	
--	------------------------------------	--

	Schüler zeichnen zeigen auf die richtige Diagonale auf der Tafel Skizze und begründen.	Welche?
--	--	---------

F1:	Schüler und Lehrer zeichnen gemeinsam eine Skizze an der Tafel und wir helfen.	Tafelbild Hilfsfiguren
-----	--	---------------------------

	L: Wie können wir die Diagonale berechnen?	Pythagoras
--	--	------------

F2:	Schüler: Wir können die Diagonale mit Hilfe der bekannten Pythagoras lösen.	
-----	---	--

	4: Schüler tragen an der Tafel das entscheidende Dreieck ein und beschriften Es wird die zwei Katheten-Seiten des Dreiecks mit a und b	
F3.	Lehrer: Berechne nun alleine am Heft. Schüler tragen Ergebnisse vor. (K2)	Einzelarbeit Anschreiben im Hft
Schluss	Le: Vorant Du mir hier, die Katheten und die entsprechenden Diagonale zeigen Schüler zeigen die Diagonale L1 Hausaufgabe: Diagonale im Kasten, Quader berechnen.	

(K2) und kommen zu dem Entschluss, dass der Schrank nicht in den Raum passt

* Siehe übernächste Seite: Heftauftrag

Skizze:



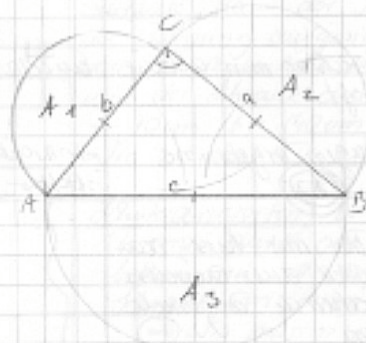
Das ist nicht (!) die Raumdiagonale des Quaders! (vgl. ob)

$$\begin{aligned}
 d^2 &= h^2 + b^2 \\
 &= 220^2 \text{ cm}^2 + 700^2 \text{ mm}^2 \\
 d &= \sqrt{533000} \\
 d &= 730,87
 \end{aligned}$$

(K2) Lehrer und Schüler überdenken die Situation und kommen zu folgenden Ergebnissen:

Aufgabe
(4)

Skizze



$$\Delta ABC \text{ rechtwinklig} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Kreisflächen: $A = r^2 \pi$; $\xrightarrow{\text{Kreis}}$ Kreis sind ~~Flächen~~ Kreise um a, b und c (Halbkreise)

$$\Rightarrow A_1 = \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left(\left(\frac{c}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) + \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{b^2}{4} \cdot \pi + \frac{a^2}{4} \cdot \pi \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} (a^2 + b^2) \right] = \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{c}{2} \right)^2 \cdot \pi \right) \right]$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 \cdot \pi$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{8} \cdot \pi = \frac{\pi}{8} \cdot (a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = A_3$$

✓

zu Aufgabe 3: Heftbeitrag:

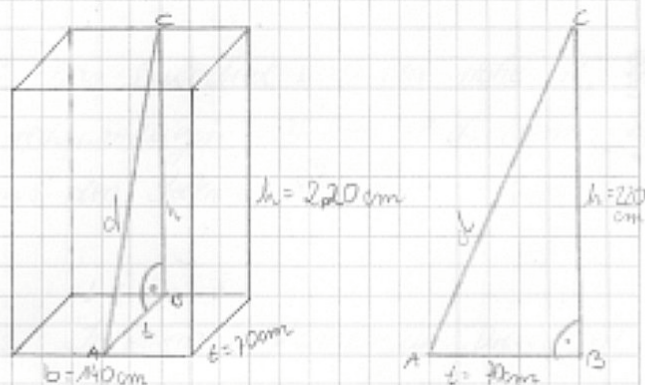
Sachaufgabe:

Ein Kunde sieht in einem Antiquitätengeschäft einen quaderförmigen unzerlegbaren Schrank

(Außenmaße: Tiefe: 70cm, Breite 140cm, Höhe 220cm)

Kann der Schrank in der Wohnung mit 230cm Raumhöhe aufgestellt werden?

Skizze:



Lösung: $\triangle ABC$ ist rechtwinklig $\Rightarrow d^2 = t^2 + h^2$

$$d^2 = (70\text{cm})^2 + (220\text{cm})^2 = 5330\text{cm}^2$$

$$d = \sqrt{5330\text{cm}^2} = 230,867\text{cm} \\ \approx 230,9\text{cm}$$

Antwortsatz: Der Schrank kann nicht in dem Zimmer aufgestellt werden. Die Diagonale ist um 0,87cm zu lang. ✓

Erstgutachten

- Zu (1) Die Sätze der Satzgruppe werden richtig formuliert und der Hauptsatz wird in einer Richtung exakt bewiesen. Der Beweis der Umkehrung ist nicht gegeben.
- Zu (2) Die beiden beschriebenen Zugänge sind nicht zu ähnlich, um als zwei wesentlich unterschiedliche Einführungsansätze gelten zu können. Beide Ansätze sind aber gut geeignet für die Hauptsache und es ist ein richtiges Argument, daß der zweite Ansatz noch ein Bisher Besseres geeignet ist. Hier fehlen aber andere Ansätze und diese Diskussion.
- Zu (3) Die Unterrichtsarbeit wird sehr knapp skizziert. Der Zugang ohne unproportionales Modell, sondern lediglich auf der ikonischen Darstellungsebene, wird nicht methodisch evaluiert.
- Zu (4) Die Aufgabe wird exakt behandelt.
- Insgesamt eine gerade noch gute (= Note 2) Bearbeitung.

Zweitprüfender

- A1) Formulierungen nicht ganz exakt, Unschärfen fehlen. Bew. des S.v. Pyth. in Ordnung. Bei der Umkehrung würde ein mir völlig neuer Beweis entdeckt und korrekt geführt. Ganz toll!
- A2) Es werden nur 3 Bspänge genannt und ausführlich diskutiert.
- A3) Trotz leichter Planungs-mängel ein beachtbarer Entwurf
- A4) Korrekt gelöst.

gesamt wert: sehr gut $\hat{=}$ 1 (noch 1)

gerne auf Note:

1 $\hat{=}$ sehr gut