Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 3\alpha & 7 & 3\alpha \\ 0 & -3 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & -5\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, welche die Gleichung $A_\alpha x = B_\alpha x$ erfüllen.

Aufgabe 2:
Gegeben seien die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ werden die Unterräume

$$U = \{A \in V \mid A = A^\top\} \quad \text{und} \quad W = \{A \in V \mid AB = O\}$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass es keine lineare injektive Abbildung $f : U \to W$ gibt.

Aufgabe 3:
Mit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ werde die Menge der invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichnet. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für alle $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gibt es ein $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $AX = B$ ist.

b) Für alle $X, Y \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gibt es $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $AB = X$ und $BA = Y$ ist.

c) Zu jedem $n \geq 1$ gibt es ein $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, welches nicht die Einheitsmatrix ist, so dass $A^n = A^{-1}$ ist.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie alle Isometrien (euklidischen Bewegungen) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die beiden Bedingungen

a) $f((0,0)^\top) = (1,1)^\top$ und

b) $f(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$

erfüllen.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Mengen $H_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $H_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, (1,1)x = 2\}$ und $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^\top x = 1\}$. Weiter sei für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$Q_{\alpha,\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\top \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} x + \alpha\beta = 0 \right\}.$$

a) Gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $Q_{\alpha,\beta}$ metrisch äquivalent (d.h. kongruent) zu $H_1 \cap H_2$ ist?

b) Gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $Q_{\alpha,\beta}$ metrisch äquivalent zu $H_1 \cup H_2$ ist?

c) Gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $Q_{\alpha,\beta}$ metrisch äquivalent zu K ist?