Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass das mit λ parametrisierte lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda x_1 & + & 3x_2 & + & 2\lambda x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie das Standardskalarprodukt

$$\langle x \mid y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie: Für $\mu \in \mathbb{R}$ existiert genau dann ein $c \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\langle a \mid c \rangle = \langle b \mid c \rangle = \mu \qquad \text{und} \qquad \langle c \mid c \rangle = 1,$$

wenn $5\mu^2 \leq 4$ ist.

b) Für welche μ ist c eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3:

Seien A und B reelle $n \times n$ Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von AB. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda = 0$, dann ist mindestens eine der beiden Matrizen A oder B nicht invertierbar.

b) Ist $\lambda \neq 0$, dann ist λ auch ein Eigenwert von BA.

Aufgabe 4:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien in $\mathbb{R}^3$ die Geraden

$$g = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden bezüglich der Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von α.

b) Für welches α schneiden sich die beiden Geraden?

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für den Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$, der durch die Gleichung

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 1 = 0$$

gegeben ist, die Euklidische Normalform und die Symmetrieachsen.