Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sei f_λ die Abbildung

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A_\lambda \mathbf{x},$$

wobei

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei der Punkt

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $\mathbf{p} \in \mathrm{Bild}(f_\lambda)$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die der Abstand zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathrm{Bild}(f_\lambda)$ gleich 1 ist.

Aufgabe 2:
Sei E der durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

definierte Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von E.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $E^\perp$.

c) Sei

$$P_E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$$

die orthonormale Projektion auf E. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $M = TDT^{-1}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $(A - E_n)(A - 3E_n) = \mathbf{0}$. Hierbei ist E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4:

Sei $\mathbb{R}^2$ die Euklidische Ebene mit dem Standardskalarprodukt und sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax + b$$

die Abbildung mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Bewegung ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fixpunktmenge von f den Typ der Bewegung f.

c) Bestimmen Sie eine Affinität $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass $f \circ g$ die Verschiebung

$$f \circ g : x \mapsto x + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 5:

Für den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ sei

$$E_\lambda : \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{3\lambda} = 1$$

eine von λ abhängige Ellipse.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation die Gleichung der zu E_λ kongruenten Ellipse F_λ, deren große Halbachse auf der Gerade $y = x + 2$ und deren kleine Halbachse auf der Gerade $y = -x + 6$ liegt.

b) Bestimmen Sie alle Werte von λ, für die F_λ den Nullpunkt enthält.