Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix und E_n die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Geben Sie die Definition eines Eigenwertes der Matrix A an.

b) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, so ist $\lambda^3 - 5$ Eigenwert der Matrix $A^3 - 5E_n$.

c) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A und gilt $A^2 - 2A + E_n = 0$, so folgt $\lambda = 1$.

d) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, so ist λ auch Eigenwert der transponierten Matrix $A^\top$.

Aufgabe 2:
Es sei X die affine Ebene in $\mathbb{R}^4$, die die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält und es sei $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 - x_3 = 0 \text{ und } x_2 + 2x_4 = 5 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass X und Y windschief sind, d.h. $X \cap Y = \emptyset$ und X, Y sind nicht parallel.

b) Berechnen Sie den euklidischen Abstand (bzgl. des Standardskalarprodukts) von X und Y.

Aufgabe 3:
Es seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

Fortsetzung nächste Seite!

a) Leiten Sie her: Die Menge aller $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, die von a und b denselben Abstand haben, ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ 2(b_1 - a_1)x_1 + 2(b_2 - a_2)x_2 = \|b\|^2 - \|a\|^2 \right\}.$$

b) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt des Dreiecks (a, b, c), wobei

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \ A \mapsto B \cdot A,$$

wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von Φ und B die folgende Gleichheit gilt:

$$\chi_\Phi = (\chi_B)^2.$$

c) Zeigen Sie, dass Φ diagonalisierbar ist und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestehend aus Eigenvektoren von Φ an.

Aufgabe 5:

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ des durch die Gleichung

$$(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + 2(a-1)xy + 2\sqrt{2}ax + 2\sqrt{2}ay + 2a - 2 = 0$$

gegebenen Kegelschnitts im $\mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von dem Parameter a.