Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $U \subset \mathbb{R}^4$, der lineare Unterraum, der von den Vektoren $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 4, 4)^\top$ und $\mathbf{u}_2 = (4, -4, 2, 0)^\top$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

b) Bestimmen Sie orthonormale Basen für jeweils U und $U^\perp$.

c) Benützen Sie die Ergebnisse von **a)** und **b)**, um eine reelle symmetrische Matrix A zu bestimmen, die U als Eigenraum zum Eigenwert -1 und $U^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 2 hat.

Aufgabe 2:
Sei

$$Q_{s,t} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid sx^2 + 2txy + y^2 - y = 0\right\}$$

eine von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie den Typ von $Q_{s,t}$ in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$.

b) Die Menge

$$M := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid Q_{s,t} \text{ hat keinen eindeutigen Mittelpunkt}\}$$

ist eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie diese Quadrik.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $\mathbf{m}_{s,t}$ von $Q_{s,t}$ für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$.

Aufgabe 3:
Sei f die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und sei G die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

bestimmte Gerade. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\mathbf{p} = (5, 3, -1)^\top$ zu G und zu $\text{Bild}(f)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die inhomogene lineare Gleichung

$$2x - y + z = 1.$$

a) Geben Sie die Lösungsmenge U in Parameterform an.

b) Sei U_0 der zu U parallele Untervektorraum. Bestimmen Sie die Matrix M der Spiegelung an U_0.

c) Bestimmen Sie die Spiegelung S an der affinen Ebene U als eine affine Abbildung

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5:

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

a) Jede Diagonalmatrix ist ähnlich zu einer symmetrischen Matrix.

b) Der Spaltenraum einer Matrix ist das orthogonale Komplement des Zeilenraums der Matrix.

c) Wenn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear abhängig voneinander sind, so hat der lineare Unterraum $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ die Dimension 2.

d) Wenn ein Endomorphismus f den Eigenwert 0 hat, so ist $\dim \mathrm{Kern}(f) > 0$.

e) Für je zwei 3×3-Matrizen A und B gilt: Wenn $AB = E_3$, dann ist auch $BA = E_3$.

f) Für je zwei 3×3-Matrizen A und B gilt: Wenn $AB = 0$, dann ist auch $BA = 0$.