Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt eine Basis $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ des $\mathbb{R}^4$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$$

b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

c) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.

d) Sei A eine Matrix mit $A^3 = A$. Dann sind die einzig möglichen Eigenwerte von A gleich 0 oder ± 1.

Aufgabe 2:

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sei E die Ebene, auf der die drei Punkte

$$P = (-1, 0, 0), Q = (0, -1, 0), R = (0, 0, -1)$$

liegen. Sei g die Gerade, die den Ursprung enthält und die auf E orthogonal ist. Man bestimme g, sowie den Schnittpunkt von g mit E und den Spiegelpunkt des Ursprungs in Bezug auf E.

Aufgabe 3:

a) Man bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die beiden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} Q_1 &: 2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 1 \\ Q_2 &: 3x^2 - 2\alpha xy + \alpha y^2 = 1 \end{aligned}$$

affin äquivalent sind.

b) Sei nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie eine affine Transformation, die Q_1 auf Q_2 abbildet.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass A nur die Eigenwerte ± 2 besitzt.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix M, die die Matrix A diagonalisiert.