Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Im $\mathbb{R}$–Vektorraum V aller Polynome mit reellen Koeffizienten seien

$$u_1 = X^3 + X^2, \qquad u_2 = X^2 + X \quad \text{und} \quad u_3 = X + 1$$

sowie

$$w_1 = X^3 - X^2 + X \quad \text{und} \quad w_2 = X^2 - X + 1$$

gegeben; ferner seien $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ die von u_1, u_2, u_3 bzw. von w_1, w_2 erzeugten Unterräume von V. Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

Aufgabe 2:
Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x;$$

es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, dass sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt, und bestimme eine Basis von U sowie eine Basis von W.

b) Man ermittle eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass f bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

Aufgabe 3:
Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine reelle $n \times n$–Matrix B betrachtet; es bezeichne $B^\top$ die zu B transponierte Matrix. Man beweise oder widerlege:

a) Ist $l \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B, so auch von $B^\top$.

b) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von B, so auch von $B^\top$.

c) Ist B diagonalisierbar, so auch $B^\top$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Man zeige, dass es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x, y)$ für x, $y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

Aufgabe 5:

Für welche Wahl des Parameters $s \in \mathbb{R}$ ist der Kegelschnitt

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1 = 0 \right\}$$

eine Parabel?. Man bestimme für diesen Parameterwert die euklidische Normalform, den Scheitel und die Symmetrieachse der Parabel P und skizziere sie im x–y–Koordinatensystem.