Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Zu

$$v := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3$$

definieren wir die Abbildung

$$\mu_v : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^2, A \mapsto Av.$$

a) Rechnen Sie nach, dass μ_v $\mathbb{R}$-linear ist.

b) Berechnen Sie den Kern von μ_v.

c) Berechnen Sie das Bild von μ_v.

Aufgabe 2:
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und sei $S_X := X + X^\top$.

a) Zeigen Sie: Die Matrix S_X ist (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar.

b) Zeigen Sie: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von S_X, dann gilt

$$X^2 v \in \operatorname{span}(v, Xv).$$

c) Folgern Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $1 \leq \dim(U) \leq 2$ und

$$\{X \cdot u | u \in U\} \subseteq U.$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

genau eine affine Abbildung $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ festgelegt ist und bestimmen Sie diese Abbildung b konkret.

b) Zeigen Sie, dass b eine Gleitspiegelung ist, und bestimmen Sie die Spiegelungsachse s, an welcher dabei zunächst gespiegelt wird, und den zu s parallelen Vektor v, um welchen anschließend verschoben wird.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Gegeben seien die Geraden

$$g = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$.

a) Berechnen Sie alle gemeinsamen Lote von g und h.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen g und h.

c) Berechnen Sie den kleinsten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^4$, welcher g und h enthält.

Aufgabe 5:
Für welche reellen Parameterwerte λ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\lambda^2 - 1\right) x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0 \right\}$$

eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel?