Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es seien a, b, c beliebige reelle Zahlen.

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x \qquad\quad + \lambda z = a \\ x + \lambda y \qquad\quad = b \\ \lambda x + y + z = c \end{cases}$$

eindeutig lösbar?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems in a) für den Fall $\lambda = 1$.

c) Unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem für $\lambda = 0$ lösbar?

Aufgabe 2:

Es seien $a = (1, 0, 0)^\top$ und $b = (0, 1, 1)^\top$. Finden Sie alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für die

$$Q(a + \lambda b) = -a + \lambda b$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3:

Es seien die Mengen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + 2y = 1 \right\}$$

sowie

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Abstand von $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^\top$ zu

a) E_1,

b) E_2 und

c) $E_1 \cap E_2$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

b) Finden Sie reelle 2×2-Matrizen D und S, so dass $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix und S invertierbar ist und dass gilt

$$A = SDS^{-1}.$$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A^n := A \cdot \ldots \cdot A$ (n Faktoren) die n-te Potenz von A. Wir definieren $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ und $\delta_n \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} := A^n.$$

Leiten Sie eine Formel für α_n her, welche keine Matrizen mehr enthält. Welchen Wert hat α_{10}?

Aufgabe 5:

Die Menge $D := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ ist ein Doppelkegel. Ist $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, so nennt man $D \cap E$ einen *Kegelschnitt.* Wir betrachten nun speziell die durch einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ parametrisierten Ebenen

$$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie, dass es (von λ abhängige) $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt

$$P_\lambda(u, v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von E_λ genau dann in D liegt, wenn

$$au^2 + 2buv + cv^2 + du + ev + f = 0$$

gilt.

b) Bestimmen Sie den affinen Typ des Kegelschnitts $E_\lambda \cap D$ in Abhängigkeit von λ.