Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei $A_\beta := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für welche A_β invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für welche das charakteristische Polynom von A_β über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt.

c) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für welche A_β reell diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2:

Sei

$$P = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : P \to \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $(1, x, x^2)$ von P und (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$ ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei J_n die Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind. Zum Beispiel ist $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $J_n \cdot J_n$.

b) Mit E_n werde die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnet. Sei

$$V := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(E_n,\ J_n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

der von E_n und J_n erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$.
Zeigen Sie: Für alle Matrizen $A, B \in V$ gilt $AB \in V$.

Aufgabe 4:

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Gegeben seien zwei Geraden

$$g := a + \mathbb{R}u \quad \text{und} \quad h := b + \mathbb{R}v$$

in $\mathbb{R}^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Geraden g und h sind windschief (d. h. g und h sind nicht parallel und haben keinen Schnittpunkt).

b) Die Vektoren u, v und $w := b - a$ sind linear unabhängig.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Wir betrachten folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\},$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x = 1 \right\},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sei E_3 die Ebene in $\mathbb{R}^3$, welche $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Bestimmen Sie für $j = 1, 2, 3$ jeweils die geometrische Form (d. h. den affinen Typ) des Durchschnitts $K \cap E_j$.