Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ mal}}$ die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Beweisen Sie:

a) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, ist *nicht* injektiv.

b) Null ist ein Eigenwert von A.

c) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda = 0$.

d) Ist A diagonalisierbar, dann ist A die Nullmatrix.

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgende Abbildung zwischen reellen Vektorräumen:

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c & 2b & 0 \\ 0 & b+4c & 5d \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Wählen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 3}$, und bestimmen Sie die darstellende Matrix F von f bezüglich der von Ihnen ausgewählten Basen.

c) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Aufgabe 3:
Sei V ein reeller Vektorraum. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ eine n-elementige Teilmenge von V, und sei $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \subset V$ eine r-elementige Teilmenge von V, wobei n und r positive ganze Zahlen sind. Zeigen Sie:

a) Aus $A \subseteq B$ folgt $\operatorname{span}(A) \subseteq \operatorname{span}(B)$.

b) Es gilt $\operatorname{span}(A) = \operatorname{span}(A \cup B)$ genau dann, wenn $B \subseteq \operatorname{span}(A)$.

Hierbei bezeichnet $\operatorname{span}(M)$ den von der Teilmenge $M \subset V$ aufgespannten Untervektorraum von V.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sigma(x, y) := x^\top \cdot A \cdot y.$$

a) Zeigen Sie, dass σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Das Skalarprodukt σ definiert einen Winkel $\angle_\sigma(v, w)$ zwischen Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Berechnen Sie
$$\cos\big(\angle_\sigma(e_1, e_2)\big).$$

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarprodukts σ, sodass gilt
$$\operatorname{span}(\{b_1\}) = \operatorname{span}(\{e_1\}) \quad \text{und} \quad \operatorname{span}(\{b_1, b_2\}) = \operatorname{span}(\{e_1, e_2\}).$$
Hierbei bezeichnet $\operatorname{span}(M)$ den von der Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 1$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = n \leq m$. Dann ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (d. h. $A^\top = -A$). Dann gilt $\det(A) = 0$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\mathbb{R}^n = \operatorname{Kern}(f) + \operatorname{Bild}(f)$.

d) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 1$, und seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt $\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(BA)$.