Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$. Wenn $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, so definiert man

$$U^{\perp} := \{v \in V | \forall u \in U\ \varphi(u, v) = 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Untervektorräume U, W von V:

a) $U^{\perp}$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - \dim(U)$.

c) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

d) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Aufgabe 2:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, X \mapsto A \cdot X$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $A \cdot X = E_2$.

Aufgabe 3:

Sei $A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, mit reellen Parametern λ, μ. Bestimmen Sie mit geeigneten Fallunterscheidungen alle Eigenwerte und -räume von $A_{\lambda,\mu}$. Für welche Parameterwerte ist $A_{\lambda,\mu}$ diagonalisierbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen eine invertierbare Matrix $S = S_{\lambda,\mu}$, für welche $S^{-1}A_{\lambda,\mu}S$ Diagonalgestalt hat.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Ebene $F \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, welche die drei Punkte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

enthält und bestimmen Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

b) Gegeben sei die Ebene $E : x + 2y + 3z = 2$ in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $E \cap F$ in Parameterform und den kürzesten Abstand von $E \cap F$ von der y-Achse.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters r die affine Normalform des durch

$$(1 + r)x^2 + ry^2 - 2rxy + y - x = 0$$

gegebenen Kegelschnitts.