Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^n$ des folgenden Systems von n linearen Gleichungen:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} x_j - \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_j = 1, \qquad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{(gibt } n-1 \text{ Gleichungen)} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2:
Sei $P_3 = \{p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ der reelle Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3.

a) Zeigen Sie: $U = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von P_3.

b) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \{X-1,\ X^2-1,\ X^3-1\}$ ist eine Basis von U.

c) Geben Sie die Abbildungsvorschrift des durch die (angeordnete) Basis $\mathcal{B}$ aus Teil b) gegebenen Vektorraumisomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^3 \to U$ an.

Aufgabe 3:
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig und $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Vektorraum aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Ferner bezeichne $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle zu $\lambda \cdot E_n$ ähnlichen Matrizen.

b) Zeigen Sie: Eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Diagonaleinträge alle gleich λ sind, ist genau dann diagonalisierbar, wenn A bereits eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4:
Für vorgegebene Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch die Gleichung

$$(a+b)x^2 + (a+b)y^2 + 2(b-a)xy + 2(2b-a)x + 2(2b+a)y + a + 4b = 2$$

mit Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ definierte Quadrik $Q_{a,b}$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Euklidische Normalform von $Q_{a,b}$.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ den Typ von $Q_{a,b}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei Δ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ und $C = (4,1)$. Sei $\tilde{\Delta}$ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\tilde{A} = (0,9)$, $\tilde{B} = (-2,1)$ und $\tilde{C} = (-2,7)$.

a) Skizzieren Sie die beiden Dreiecke Δ und $\tilde{\Delta}$ in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem.

b) Geben Sie explizit die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(A) = \tilde{A}$, $f(B) = \tilde{B}$ und $f(C) = \tilde{C}$ an, welche Δ auf $\tilde{\Delta}$ abbildet.