Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{sowie} \qquad x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

a) Man bestimme den Rang der Matrix A sowie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

b) Man bestimme $b \in \mathbb{R}^4$, so dass x_p eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist, und gebe die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems an.

Aufgabe 2:
Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums V mit der Eigenschaft $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Ferner seien

$$U = \{u \in V \mid f(u) = u\} \qquad \text{und} \qquad W = \{w \in V \mid f(w) = -w\}.$$

Man zeige:

a) U und W sind Untervektorräume von V, und für alle $v \in V$ gilt $v + f(v) \in U$ und $v - f(v) \in W$.

b) Es ist $U + W = V$ und $U \cap W = \{0_V\}$.

c) Ist V vom Nullraum $\{0_V\}$ verschieden und endlich erzeugt, so ist der Endomorphismus $f : V \to V$ diagonalisierbar.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, betrachte man eine Drehung d mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$, so dass

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von d bezüglich b_1, b_2, b_3 ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix von d bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$.

c) Man entscheide, ob d bezüglich einer Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt besitzt, und begründe die Entscheidung.

Aufgabe 4:

Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, seien die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, und bestimme den Punkt D, so dass $\square ABCD$ ein Quadrat ist.

b) Man bestimme eine Gleichung für die Ebene E, in der das Quadrat $\square ABCD$ liegt, sowie eine Parameterdarstellung für die Lotgerade ℓ zu E durch den Mittelpunkt von $\square ABCD$.

c) Man bestimme alle Punkte S auf der Geraden ℓ, für welche die Pyramide mit der Grundfläche $\square ABCD$ und der Spitze S das Volumen 36 besitzt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man zeige, dass es genau eine bijektive affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = M \cdot x + t,$$

mit $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$, $f(p_3) = p_4$ und $f(p_4) = p_1$ gibt, und bestimme ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von Teilaufgabe a) bildet den Einheitskreis

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

auf eine Ellipse $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ab. Man bestimme eine Gleichung für E.