Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei $Q_s \subset \mathbb{R}^2$ die von s abhängige Quadrik

$$Q_s : sx^2 + 2(s+1)xy + y = 0.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ der Quadrik Q_s in Abhängigkeit von s.

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel π und mit dem Drehzentrum $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Zeigen Sie, dass $\varphi(Q_1) = Q_1$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die folgenden drei Geraden $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{R}^3$:

$$L_1 : \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 1 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y - 2z = -1 \right\}$$

$$L_2 : \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_3 : \quad \text{Verbindungsgerade durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden paarweise schneiden und bestimmen Sie die Schnittpunkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$.

b) Sei $\triangle \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit den Ecken $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Bestimmen Sie alle drei Innenwinkel sowie den Flächeninhalt von $\triangle$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei A_s die von s abhängige Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_s in Abhängigkeit von s.

b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von f bezüglich der Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

b) Berechnen Sie B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie daraus A^n.

c) Die reellen Folgen (u_n), (v_n), (w_n) seien durch folgende Rekursionsformeln definiert: $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ sei

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 3w_n \end{aligned}$$

Berechnen Sie u_n, v_n, w_n für $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch Beweis oder Widerlegung. Dabei sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f = 0$ genau dann, wenn $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(g)$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Die Spaltenvektoren von A sind genau dann linear abhängig, wenn die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind.

c) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gilt $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

d) Sei $T \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wenn $\det(T) = \pm 1$ und die Spaltenvektoren von T paarweise senkrecht zueinander sind, so ist T eine orthogonale Matrix.