Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

a) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 1, & \text{für } i = j+1, \\ a, & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben; zu betrachten ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man zeige $\det(A) = 1 + (-1)^{n+1} a$ etwa unter Verwendung des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes.

b) Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit $\dim(V) = n \geq 3$ sowie $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V; ferner werden die Vektoren $v_j = b_j + b_{j+1}$ für $j \in \{1, \dots, n-1\}$, also

$$v_1 = b_1 + b_2, \dots, v_{n-1} = b_{n-1} + b_n,$$

sowie $v_n = b_n + b_1$ betrachtet. Man zeige etwa mit Hilfe von a), dass

- die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind,
- die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ genau dann eine Basis von V sind, wenn n ungerade ist.

2. Aufgabe

Man betrachte den von den vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

Fortsetzung nächste Seite!

a) Man zeige, dass v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

b) Man begründe, dass es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.

c) Man zeige, dass f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

3. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Man begründe, dass M orthogonal diagonalisierbar ist, und bestimme eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von M.

b) Man zeige, dass durch $\sigma(x,y) = x^\top \cdot M \cdot y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, und bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts σ.

4. Aufgabe

Gegeben sei der euklidische $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Man zeige, dass es genau zwei orthogonale 3×3–Matrizen der Form

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & s_{13} \\ 1 & 2 & s_{23} \\ 2 & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit geeigneten $s_{13}, s_{23}, s_{32}, s_{33} \in \mathbb{R}$ gibt, und gebe diese beiden Matrizen explizit an.

b) Für welche der beiden in a) ermittelten Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibt die lineare Abbildung $\ell_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_S(x) = S \cdot x$, eine Drehung? (Begründung!). Man bestimme die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels.

5. Aufgabe

Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ für den Kegelschnitt

$$K_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + s\,(s+1)\,y^2 + 2\,x = 0 \right\}$$

die affine Normalform sowie den affinen Typ.