Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Sei E die Ellipse im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung

$$Q(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 1 = 0$$

definiert wird.
(a) Zeigen Sie, dass E von den Spiegelungen

$$\varphi : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\tau : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

invariant gelassen wird.
(b) Benutzen Sie das Ergebnis von (a), um den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ von E zu bestimmen.
(c) Verschieben Sie die Koordinaten so, dass $\mathbf{m}$ der Ursprung des neuen Koordinatensystems wird. Bestimmen Sie die Gleichung Q' von E im neuen System.
(d) Benutzen Sie das Ergebnis von (a–c), um Basisvektoren der Hauptachsen zu finden. Führen Sie die Hauptachsentransformation aus, um die euklidische Normalform Q'' von E zu bestimmen.

2. Aufgabe

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

(a) Wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ ist, dann ist $2\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 2λ.

(b) Für jede quadratische Matrix A gilt $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathrm{Kern}(A^2)$.

(c) Sei $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix A. Dann ist A zur Einheitsmatrix E_n ähnlich.

(d) Wenn das Produkt AB zweier $n \times n$-Matrizen invertierbar ist, dann sind die beiden Matrizen A und B auch invertierbar.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{R})$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Sei U das Bild von A. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie den Punkt $\mathbf{u} \in U$, der $\mathbf{v}$ am nächsten liegt. Legen Sie dabei die euklidische Norm des $\mathbb{R}^3$ zugrunde.

(c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen $\mathbf{v}$ und U bezüglich der euklidischen Norm des $\mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe

Sei A die reelle, von einem Parameter $c \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -1-c \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ sind alle Eigenwerte von A reell?

(b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

5. Aufgabe

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit $A^2 + 2A = 0$.

(a) Bestimmen Sie alle solchen Matrizen, welche invertierbar sind.

(b) Sei A wie oben, aber möglicherweise nicht invertierbar. Zeigen Sie: Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sind $A\mathbf{v}$ und $\mathbf{v} + \frac{1}{2}A\mathbf{v}$ entweder Null oder Eigenvektoren von A.

(c) Zeigen Sie: A ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.