Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } C_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$.

b) Es sei $b_\alpha = A_\alpha c_\alpha$. Untersuchen Sie, ob die Gleichung $A_\alpha x = b_\alpha$ endlich oder unendlich viele Lösungen hat.

c) Zeigen Sie, dass die Matrizen A_α und C_α für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ ähnlich sind.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } x = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ habe den Eigenvektor v_1 zum Eigenwert 2, den Eigenvektor v_2 zum Eigenwert -2 und den Eigenvektor v_3 zum Eigenwert 4. Bestimmen Sie den Vektor Ax.

3. Aufgabe

Es seien α, β zwei reelle Parameter. Wir betrachten die reellen Matrizen

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung

$$\Phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ X \mapsto XA_{\alpha,\beta} - B_\beta X^\top.$$

Bestimmen Sie den Rang von $\Phi_{\alpha,\beta}$ in Abhängigkeit von $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

4. Aufgabe

Gegeben seien die Gerade

$$g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ eine Kongruenzabbildung (Euklidische Bewegung) ist, und bestimmen Sie den Typ dieser Bewegung.

b) Bestimmen Sie im Fall einer Translation den Translationsvektor, im Fall einer Drehung den Drehmittelpunkt, im Fall einer Spiegelung die Spiegelachse und im Fall einer Schubspiegelung den Schubvektor.

c) Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und $\phi(g)$ in genau einem Punkt P schneiden, und bestimmen Sie diesen.

5. Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \neq 0$ und $d = \det(A)$. Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A^\top A x = d\}.$$

Bestimmen Sie den Typ der Quadrik in Abhängigkeit von d.