Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Berechnen Sie in Abhängigkeit von den Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $L_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & - & 5\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & \alpha\,x_4 & = & \beta \end{array}$$

2. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$P^{-1}A\,P = D.$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B = A^{\top}A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

orthogonal diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$Q^{-1}B\,Q = F.$$

3. Aufgabe

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V werde eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit der Eigenschaft

$$f(v) = \alpha \cdot f(f(v)) \qquad \text{für alle} \qquad v \in V$$

betrachtet. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$v - \alpha \cdot f(v) \in \mathrm{Kern}(f) \qquad \text{für alle} \qquad v \in V.$$

b) Es gilt

$$\mathrm{Bild}(f) = \{v \in V \mid v = \alpha \cdot f(v)\}\,.$$

c) Es gilt

$$V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f),$$

das heißt

$$V = \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0_V\}\,.$$

4. Aufgabe

Gegeben seien die Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = M \cdot x + t,$$

mit

$$f(p_1) = q_1, \quad f(p_2) = q_2, \quad f(p_3) = q_3 \quad \text{und} \quad f(p_4) = q_4$$

gibt, und berechnen Sie ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^4$.

5. Aufgabe

In der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachte man in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ die Quadrik

$$Q_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 4\,x\,y + 3\,y^2 + 6\,x - 8\,y + c = 0 \right\};$$

ferner seien die beiden Geraden

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$) die affine Normalform der Quadrik Q_c und zeigen Sie damit, dass genau für $c \neq 5$ eine Hyperbel vorliegt.

b) Zeigen Sie, dass die Hyperbel Q_c (unabhängig von $c \neq 5$) die beiden Geraden a_1 und a_2 als Asymptoten besitzt.