Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Geraden

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, $n \neq 0$, der auf den beiden Geraden senkrecht steht.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die L enthält und parallel zu M ist, sowie eine Gleichung der Ebene F, die M enthält und parallel zu L ist.

c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden L und M.

2. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die Zahl $a + b + c$ ist ein Eigenwert von M. Bestimmen Sie zudem einen Eigenvektor zu $a + b + c$.

b) Zeigen Sie: Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist genau dann ein Eigenvektor von M, wenn $a = c$.

c) Bestimmen Sie eine Basis von Eigenvektoren von M, falls $a = c$ gilt.

3. Aufgabe

Es sei $V := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a + d = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Weiter sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (A_1, A_2) \mapsto \operatorname{Spur}\left(A_1^\top \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A_2 \right),$$

wobei

$$\operatorname{Spur} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_4.$$

Zeigen Sie:

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf V.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement U von $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

4. Aufgabe

Es seien $t \in \mathbb{R}$,

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} t & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 3 & 3t-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 := \begin{pmatrix} 2-t \\ 3-t \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_3 := \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$\varphi(A_1) = u_1, \quad \varphi(A_2) = u_2, \quad \varphi(A_3) = u_3.$$

b) Für welche dieser t ist diese lineare Abbildung φ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Aufgabe

Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + 10x + 2\sqrt{3}y + 4 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie den Typ und den Mittelpunkt von Q.