Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei die Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -i, & \text{falls } i = j, \\ \sqrt{i}, & \text{falls } i = j-1, \\ \sqrt{j}, & \text{falls } i = j+1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben; somit ergibt sich etwa

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sqrt{1} & -2 & \sqrt{2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & -3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n & \sqrt{n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n} & -(n+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

a) Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

b) Zeigen Sie mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\det(A_{n+1}) = -(n+1)\det(A_n) - n\det(A_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(A_n) = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

2. Aufgabe

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

werde die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv ist, und bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

b) Bestimmen Sie eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

c) Entscheiden Sie, ob es eine Basis b_1', b_2', b_3', b_4' von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis c_1', c_2', c_3' von $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt, und begründen Sie die Entscheidung.

3. Aufgabe

In Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -s & -s-1 & -s-2 \\ s & s & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix A_s (unabhängig vom Parameter $s \in \mathbb{R}$) die einfache Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und die doppelte Nullstelle $\lambda_2 = 1$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix A_s genau für $s = 0$ diagonalisierbar ist.

c) Bestimmen Sie im Fall $s = 0$ eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit

$$P^{-1} A_0 \, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine quadratische $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft

$$A^\top = -A$$

betrachtet; dabei bezeichnet $A^\top$ die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda = 0$.

b) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell diagonalisierbar, so ist A die Nullmatrix.

c) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist $n \in \mathbb{N}$ gerade.

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4\,x^2 - 4\,x\,y + y^2 + 7\,x - 16\,y + 14 = 0 \right\}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie anhand der euklidischen Normalform, dass Q eine Parabel ist.

b) Bestimmen Sie die Symmetrieachse sowie den Scheitel der Parabel Q und skizzieren Sie Q im x–y–Koordinatensystem.