Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Im folgenden Rätsel hat jeder Buchstabe E, I, N, R und T einen Wert $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 9$. Verschiedene Buchstaben haben verschiedene Werte. Der Wert eines Wortes ist die Summe der Werte seiner Buchstaben. Zu bestimmen sind die Werte der Buchstaben. Die Werte folgender Wörter sind gegeben:

Wort	Wert
TITRIERT	52
INTERNIERT	48
RETTERINNEN	45
EINTRETEN	40

a) Beschreiben Sie das Problem als lineares Gleichungssystem.

b) Lösen Sie das Rätsel unter Verwendung des Gauß-Verfahrens.

2. Aufgabe

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene mit der Gleichung $2x + y + 2z = 0$.

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von E sowie von $E^\perp$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix M der Spiegelung

$$S_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$$

an der Ebene E.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, so dass $S_F : \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x} + \mathbf{t}$ die Spiegelung an der Ebene F mit der Gleichung $2x + y + 2z = 4$ ist.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie, ob es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beide Diagonalgestalt in dieser neuen Basis haben.

4. Aufgabe

Wahr oder falsch: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ bildet die Teilmenge aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die der Gleichung $A^2 + A = 0$ genügen, einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n \times n}$.

b) Es gibt lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f)$.

c) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwei lineare Abbildungen mit $f \circ g = 0$ und $g \circ f = 0$. Dann ist $f = 0$ oder $g = 0$.

5. Aufgabe

Sei $Q_s \subset \mathbb{R}^2$ die vom reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik mit der Gleichung

$$s\,x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + (s-2)\,y^2 + \sqrt{3}(s+1)\,x + (s+1)\,y + 2 = 0.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit von s.