Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2024**	**43912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Lineare Algebra/Geometrie**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 8

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_\lambda) \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & & & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass (G_λ) für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass die Lösung von (G_λ) die Gleichung $x_3 = 0$ erfüllt.

2. Aufgabe

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie: Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$ gilt genau dann $\|a - b\| = 1$, wenn $\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$.

b) Bezeichne

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nicht-negative reelle Zahlen x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 und z_3 so, dass für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 aus Teil b) zusammen mit dem Nullvektor $v_0 = 0$ die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders bilden.

3. Aufgabe

Gegeben seien die Matrizen $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der beiden Matrizen Q und R sowie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T mit der Eigenschaft

$$T^{-1}QT = R.$$

4. Aufgabe

Gegeben seien in der Ebene die Punkte

$$A = (0,2), \quad B = (0,4), \quad C = (1,2) \text{ und } D_\lambda = (1,\lambda),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

a) Bestimmen Sie sämtliche $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass es eine euklidische Bewegung des $\mathbb{R}^2$ gibt, die die Strecke $[AB]$ auf die Strecke $[CD_\lambda]$ abbildet.

b) Bestimmen Sie für jedes λ aus Teil a) jeweils alle euklidischen Bewegungen, die die Strecke $[AB]$ auf die Strecke $[CD_\lambda]$ abbilden.

5. Aufgabe

Gegeben sei $H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 1 \right\}$.

a) Geben Sie alle bijektiven affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die $f(H) \subseteq H$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie alle euklidischen Bewegungen, die $f(H) \subseteq H$ erfüllen.