Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

a) Bestimmen Sie alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + x + 2y = 12$$

lösen.

b) Begründen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

keine Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ besitzt.

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Vektorräume V und für alle Untervektorräume $U \subseteq V$ sowie für alle $u, u' \in V$ gilt:

i) Wenn $u, u' \notin U$, dann $u + u' \notin U$.

ii) Wenn $u, u' \notin U$, dann $u + u' \in U$.

iii) Wenn $u \notin U, u' \in U$, dann $u + u' \notin U$.

3. Aufgabe

Wir betrachten die Matrix

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

dabei sind a, b, c reelle Parameter.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $A_{a,b,c}$.

b) Bestimmen Sie alle Werte für a, b und c, für welche die Matrix $A_{a,b,c}$ diagonalisierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt, sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Matrix $S^{-1}A_{a,4,4}S$ eine Diagonalmatrix ist.

4. Aufgabe

a) Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen und

$$U := \operatorname{span}(v, w)$$

sei der von den Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Zeigen Sie durch Rechnung, dass die lineare orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U durch die Abbildungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5x + 4y - 2z \\ 4x + 5y + 2z \\ -2x + 2y + 8z \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

b) Geben Sie die Abbildungsvorschrift der affinen orthogonalen Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + U$$

explizit an.

5. Aufgabe

Wir betrachten die durch

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$$

gegebene Ellipse E in $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von E.

b) Berechnen Sie die vier Scheitelpunkte der Ellipse E.