

Thema Nr. 2  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

### 1. Aufgabe

Gegeben sei die reelle  $3 \times 3$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , für welche die Gleichung

$$A^n x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt.

### 2. Aufgabe

Es seien  $V$  ein reeller Vektorraum und  $n$  eine natürliche Zahl  $\geq 1$ . Es sei  $(v_1, \dots, v_n)$  ein  $n$ -Tupel von Vektoren aus  $V$ . Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- i)  $(v_1, \dots, v_n)$  ist linear unabhängig.
- ii) Für jede injektive lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$  ist  $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$  linear unabhängig.
- iii) Es existiert eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$ , so dass  $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$  linear unabhängig ist.

### 3. Aufgabe

Es sei  $t$  ein reeller Parameter. Gegeben sei die reelle  $4 \times 4$ -Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\chi_{A_t}(\lambda) = (\lambda - t)(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - t - 1)$$

das charakteristische Polynom von  $A_t$  ist.

b) Nun sei  $t = 0$ . Überprüfen Sie die Matrix  $A_0$  auf Diagonalisierbarkeit.

### 4. Aufgabe

Für  $s \in \mathbb{R}$  sei die symmetrische Bilinearform

$$\beta_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T \cdot \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle  $s \in \mathbb{R}$ , für welche  $\beta_s$  ein Skalarprodukt ist.

b) Sei nun  $s = 2$  (und damit  $\beta_2$  ein Skalarprodukt). Orthonormalisieren Sie die Basis

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

des  $\mathbb{R}^3$  nach dem Verfahren von Gram-Schmidt bzgl.  $\beta_2$ .

**5. Aufgabe**

Es seien  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}$  eine symmetrische Matrix und  $c \in \mathbb{R}$ . Weiter sei

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top Ax + c = 0\}.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

- a)  $Q$  ist ein Kreis.
- b) Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  so, dass gilt:  $A = a \cdot E_2$  und  $a \cdot c < 0$ . Hierbei bezeichnet  $E_2$  die Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .