Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \neq 0$ und $A^2 = 0$.

a) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Sei zudem $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $B \neq 0$ und $B^2 = 0$. Zeigen Sie: B ist ähnlich zu A.

2. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, sei E_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Matrix $v \cdot (w^\top) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann die Nullmatrix, wenn $v = 0$ oder $w = 0$ gilt.

b) Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und sei $A = E_n + x \cdot (y^\top)$. Zeigen Sie (z. B. durch direktes Nachrechnen):
$A^2 = E_n$ gilt genau dann, wenn $x^\top \cdot y = -2$.

c) Geben Sie (z. B. unter Verwendung von Teilaufgabe b)) mit Begründung eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die folgende drei Eigenschaften hat:

- Alle Koeffizienten von A sind ganzzahlig.
- Kein Koeffizient von A ist gleich Null.
- $\det(A) \in \{-1,\ 1\}$.

3. Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ betrachten wir die Abbildung

$$\mathrm{Spur}: \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_{jj},$$

die einer $(n \times n)$-Matrix die Summe ihrer Diagonalkoeffizienten zuordnet. In dieser Aufgabe darf

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ohne Beweis verwendet werden.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung Spur ist linear.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antisymmetrisch (d. h. $B^\top = -B$), dann ist $\mathrm{Spur}(AB) = 0$.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$AB - BA = E_n.$$

Hierbei bezeichnet E_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

4. Aufgabe

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und sei

$$\sigma_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^\top A w$$

die zu A gehörende symmetrische Bilinearform.

a) Zeigen Sie, dass σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie bezüglich σ_A eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$, sodass gilt:

$$\mathrm{Span}\{b_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Span}\{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \end{pmatrix}^\top : x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Aufgabe

Sei

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 2xy - 2y - 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ von Q.

b) Geben Sie eine affine Transformation f von $\mathbb{R}^2$ an, welche die Quadrik Q auf ihre affine Normalform abbildet. Bestimmen Sie zudem die Asymptoten sowie den Mittelpunkt von Q.