Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist.

b) Berechnen Sie für $t = 0$ die zu A_0 inverse Matrix.

c) Lösen Sie für $t = 0$ die Gleichung

$$A_0 x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

Für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix

$$B_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3t & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche B_t diagonalisierbar ist.

b) Geben Sie alle $t \in \mathbb{R}$ an, für die B_t zu einer der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ähnlich ist.

3. Aufgabe

Es bezeichne „$\times$" das Kreuzprodukt und $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto v \times e_1$$

ist linear und erfüllt $\text{Bild}(\varphi) = (\mathbb{R}e_1)^\perp$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\text{Bild}(\psi) = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ existiert ein Vektor $u \in \mathbb{R}^3$, so dass $\psi(v) = v \times u$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

4. Aufgabe

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, die den Eigenwert 1 besitzt. Zeigen Sie, dass die Eigenräume zum Eigenwert 1 von A und ihrer Transponierten, also $A^\top$, übereinstimmen.

b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine orthogonale Matrix.

Zeigen Sie:

Beschreibt B eine Drehung, so beschreibt auch $B^\top$ eine Drehung.

Beweisen Sie ferner, dass die Drehachsen und die Kosinus der Drehwinkel beider Drehungen übereinstimmen.

5. Aufgabe

Für den reellen Parameter t sei Q_t die Quadrik im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung

$$(1+t)x^2 + (1+t)y^2 + 2(1-t)xy + 2\sqrt{2}(1-t)x + 2\sqrt{2}(1+t)y + 2t = 0$$

gegeben ist. Weiter sei

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 2y^2 = 1 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die E und Q_t metrisch äquivalent sind.

b) Geben Sie alle $t \in \mathbb{R}$ an, für die E und Q_t affin äquivalent sind.