Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**1. Aufgabe**

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $A$ keine reellen Eigenwerte besitzt.

b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $M = BB^\top + B^\top B$ reelle Eigenwerte besitzt.

**2. Aufgabe**

Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für die $\mathrm{Rang}(A_{\alpha,\beta}) = 2$ ist.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für die

$$\mathrm{Kern}(A_{\alpha,\beta}) = \mathrm{Bild}(A_{\alpha,\beta})$$

gilt.

### 3. Aufgabe

Es sei $U$ Unterraum von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(U) = 2$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Menge
$$\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid U \text{ ist der Kern von } A\}$$
ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) Zu $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die Menge
$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx \in U\}$$
ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

c) Ist $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar, so gibt es ein $x \in U \setminus \{0\}$, so dass $Cx \in U$.

### 4. Aufgabe

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1 \\ bx_1 + ax_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f$ eine euklidische Bewegung ist.

b) Bestimmen Sie für die in Teilaufgabe a) gefundenen euklidischen Bewegungen jeweils den Typ der Bewegung.

### 5. Aufgabe

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ und $S \in O_2(\mathbb{R})$ sei $A = S \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} S^\top$. Weiter sei
$$Q_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1x_2 = b\right\} \quad \text{und} \quad Q_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\top A x = 1\right\}.$$

Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die $Q_1$ und $Q_2$ kongruent sind.