Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2025**	**43912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Lineare Algebra/Geometrie**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 8

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$

ist bilinear.

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(x) = Ax$. Dann gibt es Basen B_1 und B_2 von $\mathbb{R}^2$, sodass die Darstellungsmatrix $M_{B_1,B_2}(f)$ von f bezüglich B_1 und B_2 eine Diagonalmatrix ist.

c) Sind symmetrische Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, so ist

$$XYX$$

ebenfalls eine positiv definite symmetrische Matrix.

2. Aufgabe

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2y \\ 3z - x \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{A,A}(f)$ und $M_{A,B}(f)$ von f zu den Basispaaren (A, A) und (A, B) und untersuchen Sie diese Matrizen auf Diagonalisierbarkeit.

3. Aufgabe

Sei $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und sei E die folgende affine Hyperebene:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Bewegung T im $\mathbb{R}^4$ mit

$$T(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\}.$$

4. Aufgabe

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und σ die bilineare Abbildung

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^\top A y.$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung σ ist ein Skalarprodukt.

b) Ist $W \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum, so gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$\pi(w) = w \text{ für alle } w \in W \text{ und } \pi(u) = 0 \text{ für alle } u \in W^\perp,$$

wobei $W^\perp$ das orthogonale Komplement von W bezüglich σ bezeichne. Zudem gilt für alle $v \in V$:

$$\pi(v) - v \in W^\perp.$$

5. Aufgabe

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die euklidische Normalform sowie den affinen Typ der Quadrik Q_t in $\mathbb{R}^2$, welche wie folgt definiert ist:

$$Q_t := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 4xy + 4y^2 + \frac{t}{\sqrt{5}}(2x + y) = t \right\}.$$