

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Es sei für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=0}^n 4^k, \quad b_n = \prod_{k=1}^n 2^k$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2

Es sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 + \ln(1 + x^2)}{1 + x^2}.$$

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = c$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle stetigen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [0, 1]$

$$f(x) = x \cdot \int_0^1 \left(f(t) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right) dt$$

gilt.

Aufgabe 4

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \arctan(y - x)$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion.

(b) Es sei

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf Δ .

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(x) + e^{2x}.$$

(a) Geben Sie differenzierbare Funktionen $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion f eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

ist.

(b) Geben Sie reelle Zahlen a_0, a_1, a_2 an, so dass f eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) + a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

ist.