Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1**

Untersuchen Sie die reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)$$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $c_1 = c_2 = -1$ und

$$c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1}.$$

**Aufgabe 2**

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\arctan(x)))^n$$

konvergiert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$

konvergiert.

**Aufgabe 3**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = -x^2 + y\exp(x^2) - \sin(y).$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f$.

(b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von $f$ auf der Menge

$$Q = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi].$$

Fortsetzung nächste Seite!

## Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, die sowohl die Gleichung

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

für $x > 0$, als auch die Gleichung

$$\int_1^2 f(x)\,dx = f(1) \cdot f(2)$$

erfüllen.

## Aufgabe 5

Seien $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(1) Die Funktion $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h(a) = \int_{-1}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{1} g(x)\,dx,$$

ist konstant.

(2) $f = g$.