

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Überprüfen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! + n^n}.$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = e^x \cdot \cos(x) + x^2$$

Zeigen Sie, dass sowohl die Funktion f als auch ihre Ableitung f' unendlich viele reelle Nullstellen besitzen.

Aufgabe 3

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Stellen Sie die Reihe für diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die sie konvergiert, als elementare Funktion dar.

(c) Geben Sie für $x \in] - 1, 1[$ eine Reihenentwicklung des Arcustangens (mit Begründung) an.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)^2}{x(x+1)}, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.