Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{kN} \frac{k^N}{k^5 + N}$$

konvergiert.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$c = \int_0^{\pi} (\sin(x) f'(x) + \cos(x) f(x))\, dx$$

gilt.

(b) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$c = \int_0^{\pi} \sin(f(x))\, f'(x)\, dx$$

gilt.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^{k!}}\, x^{2k+1}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^{k!}}\, x^{2k+1},$$

auf Monotonie.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan(xy) - x^2, & \text{falls } y \leq x, \\ xy - \arctan(x^2), & \text{falls } y > x. \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie, ob f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion f auf der Menge

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen

$$f :]0, \infty[\to]0, \infty[,$$

welche gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllen.

- Für alle $x \in]0, \infty[$ gilt
$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x} + \cos(x) \right).$$
- Für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, gilt
$$\frac{k\pi}{2e} \leq f\left(\frac{k\pi}{2}\right) \leq \frac{k\pi e}{2}.$$