Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei

$$a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$

(c) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei

$$b_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Berechnen Sie $\lim_{n \to \infty} b_n$.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit

$$0 < a_n < 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann konvergiert auch die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(0) = f(1)$, so dass f auf $]0,1[$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in]0,1[$ mit $f'(\xi) = 0$.

(c) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine positive reelle Folge, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert. Dann konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - a_n}{1 + a_n}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt der kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, welche von der x-Achse und dem Graphen der Funktion

$$f : \left[0, \frac{5}{2}\pi\right] \to \mathbb{R},$$

definiert durch

$$f(x) = x \cdot \cos(x),$$

berandet wird.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^x = x^2 + 2x + 2$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) - 4\,e^x \sin(x) = 0.$$

Fortsetzung nächste Seite!