

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x - \arctan(x).$$

Zeigen Sie

$$f(x) \begin{cases} > 0, & \text{für } x > 0, \\ = 0, & \text{für } x = 0, \\ < 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$a_{n+1} = \arctan(a_n)$$

und $a_1 = a$ rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist und gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Kurve $\gamma : [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (4 - t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \\ t \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie

$$\|\gamma'(t)\| = 2t^{-\frac{1}{3}}$$

für alle $t \in [1, 8]$.

Fortsetzung nächste Seite!

(b) Berechnen Sie die Länge von γ .

(c) Sei $\varphi : [0, 9] \rightarrow [1, 8]$ definiert durch

$$\varphi(s) = \left(\frac{s}{3} + 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Zeigen Sie

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = 1$$

für alle $s \in [0, 9]$.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u+h)\sin(h) - hu}{h^2} = 1$$

gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} \sin(x+y), & \text{für } x+y \neq 0, \\ x-y, & \text{für } x+y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R}^2 partiell nach x differenzierbar ist.

Aufgabe 5

Geben Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$$

an.