Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

Sei p_n die n-te Primzahl (der Größe nach geordnet, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ usw.). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p_n}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2}.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_{n+1} - p_n)^n}.$$

Aufgabe 2

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit verschiedenen Grenzwerten. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die durch

$$a_n = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definierte Folge ist konvergent.

(b) Die durch

$$b_n = \begin{cases} x_n + y_{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} + y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definierte Folge ist konvergent.

(c) Die durch $c_1 = x_1 - y_1$ und

$$c_{n+1} = c_n + \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

rekursiv definierte Folge ist konvergent.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

und $f : K \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 - 1).$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f im Innern von K.

(b) Bestimmen Sie $f(K)$.

Aufgabe 4

Es sei $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

und den Anfangswert

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

erfüllt. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to \pi} f(x).$$

Aufgabe 5

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ sei $G_{a,b}$ die Gerade durch die Punkte

$$(0, a),\ (1, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Im Fall $a \neq b$ sei $f(a, b)$ die x-Koordinate des Schnittpunktes der Gerade $G_{a,b}$ und der x-Achse. Untersuchen Sie, ob sich f stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt.