Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

(b) Widerlegen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Aufgabe 2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n \cdot \sin(nx), & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right], \\ 0, & \text{für } x \in \left]\frac{\pi}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie f_4.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ ist f_n im Punkt

$$x = \frac{\pi}{n}$$

stetig.

(c) Zeigen Sie: Für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

(d) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\, dx \right).$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Sei $r > 0$ und

$$S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

sowie $f : S_r \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + y.$$

Bestimmen Sie das Maximum von f auf S_r.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die maximale reelle Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) - \alpha y'(x) = \frac{1}{2 + 2x^2}, \qquad y(0) = 0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, und geben Sie in diesen Fällen die maximale Lösung dieses Anfangswertproblems an.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f(p + h) - f(p - h)}{2h}$$

existiert, dann ist f in p differenzierbar.

(b) Wenn f in p differenzierbar ist, dann existiert der Grenzwert aus Aufgabenteil (a).