

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

gilt.

(b) Es seien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n + y_n)$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{2x^2 + 12x - 22}{x^2 + 6x - 16} dx.$$

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(r) - r^2}{r^4} = -\frac{1}{12}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{2}, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

in $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x + y) \exp(-(x^2 + y^2)).$$

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = x + \cos(x).$$