Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert. Dann ist die Folge eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f monoton wachsend ist.

(b) Beweisen Sie: Wenn es zudem keine zwei reellen Zahlen $a < b$ gibt, so dass

$$f'(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \left]a, b\right[$$

gilt, dann ist f sogar streng monoton wachsend.

Aufgabe 3:
Sei $f :]-1.1[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Stellen Sie f (z. B. mit Hilfe der geometrischen Reihe) als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 dar.

(b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(0)$ von f an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 4:

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit

$$h(-1) < 0 < h(1).$$

Zeigen Sie dass die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = \int_0^x h(t)\, dt$$

definiert ist, ein globales Minimum besitzt.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie zwei Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die drei Funktionen

$$y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

die durch

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2e^{3x} \sin(2x) + 3e^{3x} \cos(2x) + e^{-x}, \\ y_2(x) &= e^{3x} \sin(2x) + 4e^{3x} \cos(2x) + e^{-x}, \\ y_3(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

definiert sind, Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = g(x)$$

sind.