Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners)

$$x^x > \frac{1}{2}$$

für alle $x \in]0, \infty[$.

Aufgabe 2:

Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$f(x) = f(x^2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie $f(x) = f(0)$ für alle $x \in [0, 1[$.

c) Zeigen Sie $f(x) = f(1)$ für alle $x \in [1, \infty[$.

d) Folgern Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2+xy)y^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, im Punkt $(0,0)$ aber unstetig ist.

b) Bestimmen Sie alle Stellen (x,y) in denen f total differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie ohne Berechnung der Ableitungen: Jede Stelle $(x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine lokale Minimalstelle von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} (x+1)^k$$

konvergiert.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie eine Lösung $y : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \ln(x) \cdot y(x), \quad y(1) = 1,$$

und untersuchen Sie, ob weitere Lösungen existieren.