Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.

b) Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Aufgabe 2:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Das Taylorpolynom der Ordnung n mit Entwicklungspunkt 0 werde mit T_n bezeichnet.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lagrangeschen Restgliedes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} = 0.$$

b) Zeigen Sie: Sei Q_n ein Polynom vom Grad höchstens n mit

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q_n(x)}{x^n} = 0.$$

Dann gilt $Q_n = 0$.

c) Zeigen Sie: Ist P_n ein Polynom vom Grad höchstens n, welches

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0$$

erfüllt, dann ist $T_n = P_n$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man nennt f periodisch, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$f(x+c) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist f periodisch, so ist auch f' periodisch.

b) Ist f' periodisch, dann ist auch f periodisch.

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und untersuchen Sie jeweils, ob ein lokales Extremum von f vorliegt.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 4y(x) = 5\sin(x) - 4x$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 4$.