Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{-x}.$$

a) Zeigen Sie, dass es genau eine reelle Zahl ξ gibt, die

$$f(\xi) = \xi$$

erfüllt.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ f$ und zeigen Sie, dass

$$0 < (f \circ f)'(x) < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass ξ auch der einzige Punkt mit

$$f(f(\xi)) = \xi$$

ist.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = a \in \mathbb{R}$ und

$$x_{n+1} = e^{-x_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Verwenden Sie für die folgenden Teilaufgaben die Resultate von Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass die Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monotone Folgen sind.

b) Zeigen Sie, dass beide Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.

c) Folgern Sie daraus, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Für $a < b$ sei

$$f(a,b) = \int_a^b (x^2 - x)\,dx.$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f auf dem Definitionsbereich

$$D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$$

und zeigen Sie, dass f ein globales Minimum besitzt.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie

$$\int_0^2 t\,\exp(-t^2)\,dt.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + ay(x) = 0.$$