Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

b) Zeigen Sie: Wenn die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

absolut konvergieren, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

absolut.

Aufgabe 2:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine monoton wachsende Funktion. Für ein gegebenes $x_1 \in [a, b]$ definieren wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton. (Man unterscheide die Fälle $x_1 \geq x_2$ und $x_1 < x_2$.)

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Ist f zudem stetig, dann ist der Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fixpunkt von f. Das heißt, es gilt $f(x) = x$.

Aufgabe 3:

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monoton fallende (nicht notwendig differenzierbare) Funktionen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten durch einen Beweis oder ein Gebenbeispiel!

a) Die Funktion $f + g$ ist monoton fallend.

b) Die Funktion $f - g$ ist monoton fallend.

c) Die Funktion $f \circ g$ ist monoton wachsend.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche beide auf $]a, b[$ stetig differenzierbar sind. Ferner gelte $g(a) = g(b)$ und $h(a) = h(b)$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f :]a, b[\times]a, b[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y),$$

mindestens eine kritische Stelle besitzt.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle $a > 0$, für welche jede reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + a^2 y(x) = \cos(x)$$

unbeschränkt ist.