

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4+3n^2+n} x^n.$$

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sin(x) - x.$$

a) Man zeige, dass f' unendlich viele Nullstellen hat.

b) Man zeige, dass f streng monoton fällt.

c) Man zeige, dass f genau eine Nullstelle hat und gebe ein abgeschlossenes Intervall der Länge π an, das die Nullstelle enthält.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \cos\left(\pi \frac{3x-3}{3x-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9}\right) dx.$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2-5(x^2+y^2)^2}.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt und ob dieses Extremum global ist.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = -\frac{2e^{-y(x)}}{x^2+2x}, \quad y(1) = 0$$

und ihren maximalen Definitionsbereich.