Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+2} = a_n a_{n+1} \text{ für } n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert.

Aufgabe 2:
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweisen oder widerlegen Sie:

a)

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent, so ist } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \text{ divergent.}$$

b)

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent, so ist } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \text{ konvergent.}$$

c)

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent, so ist } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \text{ absolut konvergent.}$$

Aufgabe 3:
Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}.$$

a) Zeigen Sie $f(x) > 0$ für alle $x > 0$.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

bijektiv ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Gegeben sei das Dreieck

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 3\}$$

und die Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (3 - (x + y))\, e^x y^2.$$

Bestimmen Sie $f(\Delta)$.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Differentialgleichung

$$y'(x) = xe^x y(x)$$

erfüllen und für die $y(\mathbb{R}) = [1, \infty]$ gilt.