Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die Rekursion

$$a_n = a_{n-1}^k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $a_0 > 0$ für ein $k \geq 0$ definiert sind.

a) Berechnen Sie den Wert der Potenzreihe an der Stelle

$$x = \frac{1}{2}$$

i) für $k = 0$ und $a_0 = 2$,

ii) für $k = 1$ und $a_0 = 2$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe in Abhängigkeit von k und a_0.

Aufgabe 2:
Wir betrachten das Gebiet des $\mathbb{R}^2$, das von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(e + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{3}\cosh(3x)$$

eingeschlossen wird.

a) Berechnen Sie die Fläche des Gebietes.

b) Berechnen Sie seinen Umfang.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ wenn } \frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \\ 0, \text{ wenn } x = 0. \end{cases}$$

a) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von f.

b) Entscheiden Sie, ob f in $x = 0$ stetig ist.

c) Entscheiden Sie, ob f in $x = 0$ differenzierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Wir betrachten die Funktion $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln(t)\, dt.$$

a) Berechnen Sie $f(x)$.

b) Zeigen Sie, dass im Intervall $[1, e]$ eine Stelle x existiert, so dass die Tangente in x an den Graphen von f die Steigung $1/e$ hat.

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + 2ky'(x) + k^2 y(x) = 3x^2 - 2$$

mit einer Konstanten $k > 0$.

a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Anfangswert

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.