Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

absolut.

b) Zeigen Sie: Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

absolut.

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x).$$

b) Sei $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(y) = \int_{-1}^{y} \cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)\, dx.$$

Bestimmen Sie die Stellen, an denen f ein Maximum und Minimum annimmt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nach oben und unten beschränkte und stetig differenzierbare Funktion, so dass

$$c = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

existiert. Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ gilt.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Ist $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0,$$

dann ist f beschränkt.

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y + y^2.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$g(t) = f(ta, tb)$$

ein lokales Minimum in $t = 0$ hat.

b) Zeigen Sie, dass f kein lokales Minimum in $(0, 0)$ hat.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 2\cos(x) - 2\sin(x).$$