Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \geq 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

b) Zeigen Sie: Die Aussage in (a) gilt nicht mehr, wenn man von der Reihe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert.

Aufgabe 2:
a) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} x^3 \cos(x)\, dx.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

auf dem Intervall

$$\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$$

monoton fällt.

c) Beweisen Sie mit (b) für die in (b) gegebene Funktion f die Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x)\, dx \leq \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3:
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie für alle $x \in [-1, 1]$ die Ableitung $f'(x)$.

b) Ist die Funktion f' beschränkt?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \exp(x)\sin(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 vom Grad 2 von f im Entwicklungspunkt 0.

b) Zeigen Sie

$$|T_2(x) - f(x)| < 10^{-3}$$

für alle

$$x \in [-\frac{1}{10}, 0].$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass jede reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2ay' + by = 0$$

auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist.