Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Seien $a_1, a_2, \ldots \in]0, \infty[$. Beweisen Sie mit dem Majorantenkriterium, dass aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

folgt.

Aufgabe 2:

Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\sup\{f(x) : -1 \leq x \leq 1\} = \sup\{g(x) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [-1, 1]$ gibt mit

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

für alle $x \in [0, \pi]$.

b) Beweisen Sie diese Ungleichung für $x > \pi$.

Aufgabe 4:

Sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x - y).$$

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f für $x, y > 0$.

b) Bestimmen Sie das globale Maximum von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
Für welche $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, besitzt die Differentialgleichung

$$y'' + c^2 y = 0$$

eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = 0$ und $\phi'(1) = 0$?